LYCEE DURZY
23 Rue Léonard de Vinci, 45700 Villemandeur
02 38 28 10 50

LOGIQUE COMBINATOIRE

OPERATIONS BOOLEENES OU LOGIQUES

Georges Boole, mathématicien anglais né en 1815 a élaboré des relations mathématiques qui ont facilité les manipulations des équations logiques

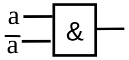
1. Propriétés et opérations élémentaires.

- **Commutativité :** Pour le ET : $S = a . b$ peut s'écrire : $S = b . a$
  Pour le OU : $S = a + b$ peut s'écrire : $S = b + a$

- **Associativité :** Pour le ET : $S = a . (b . c)$ peut s'écrire : $S = (a . b) . c$
  Pour le OU : $S = a + (b + c)$ peut s'écrire : $S = (a + b) + c$

- **Distributivité :** De la multiplication par rapport à l'addition
  $S = a . (b + c)$ peut s'écrire : $S = (a . b) + (a . c)$
  De l'addition par rapport à la multiplication
  $S = a + b . c$ peut s'écrire : $S = (a + b) . (a + c)$

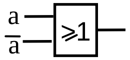
- **Complémentation :**



$S = a . \overline{a}$

a	$\overline{a}$	S
0	1	0
1	0	0

S = 0
La sortie n'est jamais validée, l'opérateur est inutile

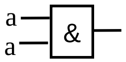


$S = a + \overline{a}$

a	$\overline{a}$	S
0	1	1
1	0	1

S = 1
La sortie est toujours validée, l'opérateur est inutile

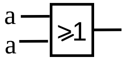
- **Idempotence :**



$S = a . a$

a	a	S
0	0	0
1	1	1

S = a
L'opérateur n'est pas nécessaire

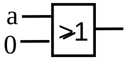


$S = a + a$

a	a	S
0	0	0
1	1	1

S = a
L'opérateur n'est pas nécessaire

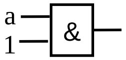
- **Elément neutre :**



$S = a + 0$

a	a	S
0	0	0
0	1	1

S = a
L'opérateur n'est pas nécessaire

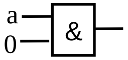


$S = a . 1$

a	a	S
1	0	0
1	1	1

S = a
L'opérateur n'est pas nécessaire

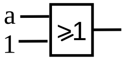
- **Elément absorbant :**



$S = a . 0$

	a	S
0	0	0
0	1	0

S = 0
La sortie n'est jamais validée, l'opérateur est inutile



$S = a + 1$

	a	S
1	0	1
1	1	1

S = 1
La sortie est toujours validée, l'opérateur est inutile

- **Résumé :**

RESUME		
$S = a . a$ $S = a + a$ $S = a . 1$ $S = a + 0$ $\boxed{S = a}$	$S = a . \overline{a}$ $S = a . 0$ $\boxed{S = 0}$	$S = a + \overline{a}$ $S = a + 1$ $\boxed{S = 1}$

- **Absorption :** $S = a + (b . a)$ se simplifie par : $S = a$
  $S = \overline{\overline{a}} . (b + a)$ se simplifie par : $S = a$
- **Involution :** $S = \overline{\overline{\overline{a}}}$ se simplifie par : $S = \overline{a}$
  $S = a$ se simplifie par : $S = a$
- **Inclusion :** $S = (a . b) + (\overline{a} . b)$ se simplifie par : $S = a$

2. Relations fondamentales.

Comme les opérations élémentaires, ces relations fondamentales permettent des simplifications d'équations logiques.

$$a + \overline{a} . b \equiv a + b$$
$$a + a . b \equiv a$$
$$a + b.c \equiv (a + b) . (a + c)$$

3. Théorème de De Morgan.

- **Complémentation d'un produit logique :**
  Le complément d'un produit logique est égal à la somme logique des facteurs complémentés de ce produit.

$$\boxed{\mathbf{S = \overline{a . b} = \overline{a} + \overline{b}}}$$

- **Complémentation d'une somme logique :** Le complément d'une somme logique est égal au produit logique des termes complémentés de cette somme.

$$\boxed{\mathbf{S = \overline{a + b} = \overline{a} . \overline{b}}}$$